4 Discuti il seguente sistema parametrico.

$$\begin{cases} x - \lambda y - z = \lambda - 1 \\ 2x + (\lambda + 1)\, y + z = 0 \\ -\lambda x + y + \lambda z = 1 - \lambda \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4 Il sistema ha 3 equazioni e 3 incognite quindi per la regola di Cramer è *determinato* soltanto se il determinante dei coefficienti è diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 & 1 \\ -\lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda^2 - 3 \neq 0,\ \lambda \neq \pm 1$$

Se $\lambda = -1$ otteniamo il seguente sistema particolare:

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}.$$

Riconosciamo immediatamente che il sistema ottenuto è *impossibile* perché la prima e la terza equazione sono incompatibili (la medesima espressione è uguagliata a due numeri diversi). Del resto confrontando la matrice incompleta con quella completa vediamo che hanno caratteristica diversa:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad c_i = 2; \quad M_s = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad c_s = 3;$$

poiché $c_i < c_s$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è *impossibile.*
Se $\lambda = 1$ otteniamo un altro sistema particolare:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}.$$

Il sistema ha 2 equazioni e 3 incognite; la matrice incompleta e quella completa hanno caratteristica 2 (la matrice completa ha una colonna in più con tutti gli elementi nulli). Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è indeterminato con ∞^1 soluzioni che possiamo esprimere attribuendo a x un qualsiasi valore reale:

$$\begin{cases} x=k \\ y=-3k \\ z=4k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}.$$